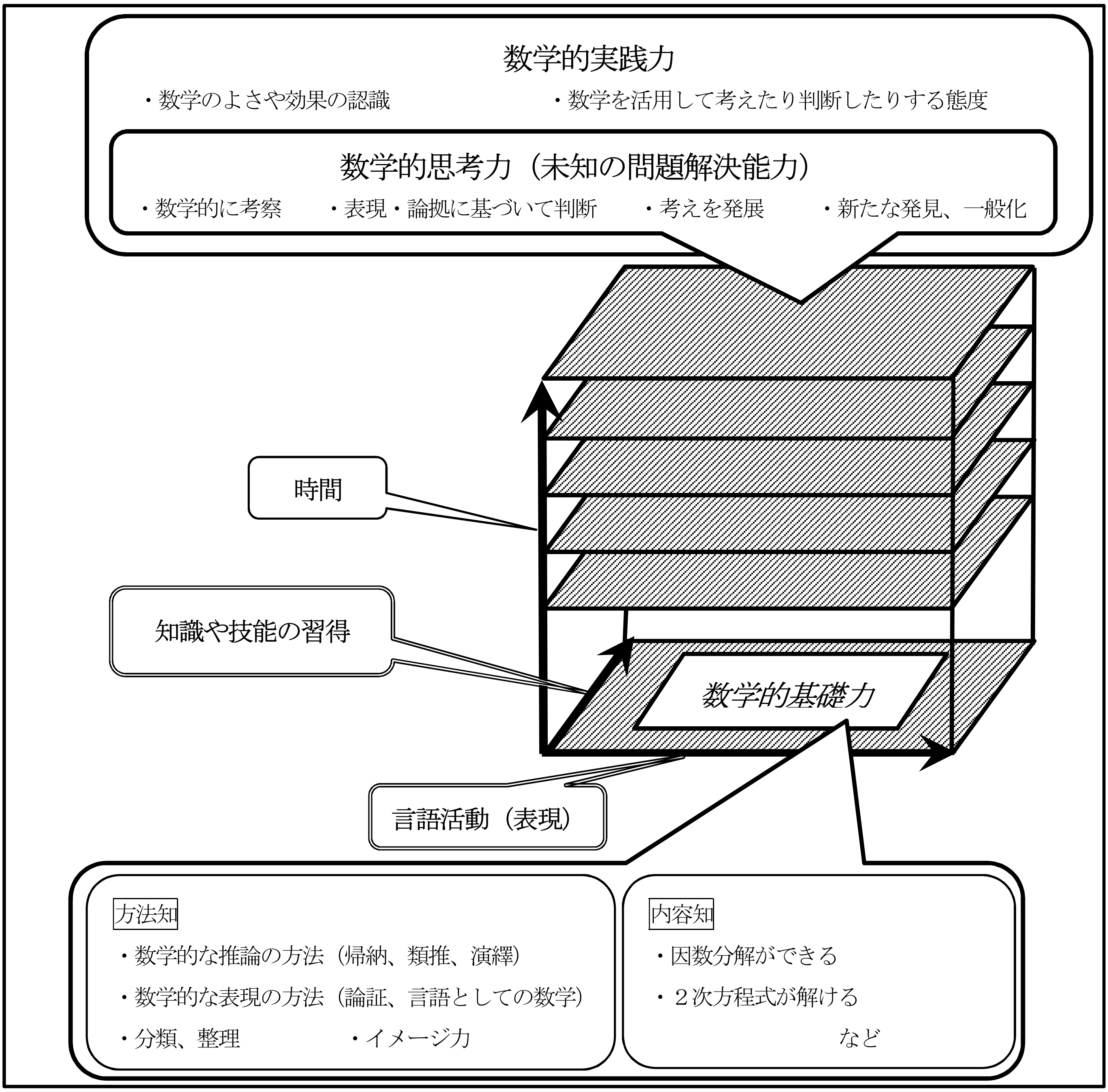
数学科の本質

数学科の本質　＝　「未知の問題を解決する力の育成」

２１世紀型能力（イメージ図：富山大附属中数学科）



数学的基礎力　＝　（知識や技能の習得）　×　（言語活動）

（知識や技能の習得）　＝　基礎的・基本的な内容を習得し、その背景にある原理・法則の理解を深め、その理解に裏付けされた確かな知識及び技能を習得すること

（言語活動）　＝　思考を他者に的確に分かりやすく伝えたり、他者の思考を解釈したりするなど、互いに伝え合うこと

数学的思考力　＝　数学的基礎力　×　時間

数学科の本質について

1　数学科の本質

本校数学科では、数学科の本質を「未知の問題を解決する力の育成」と考える。この力の育成ために、数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高める必要がある。(「学習指導要領解説　数学編」より引用)

2　２１世紀型能力　(富山大附属中数学科)

「２１世紀型能力」について、本校数学科は、左のイメージ図のように３次元的な四角柱の形で表す。このイメージ図における「数学的基礎力」とは、授業を通して身に付けさせたい能力のことであり、教科の学習内容のことではない。

「数学的基礎力」＝（知識や技能の習得）×（言語活動）として、「数学的基礎力」を２次元的な長方形の面積として考える。ここで、（知識や技能の習得）とは、簡潔に言うと方法知と内容知を習得することである。（言語活動）とは、思考を他者に的確に分かりやすく伝えたり、他者の思考を解釈したりするなど、互いに伝え合うことである。本校では、平成２３年度から平成２７年度までの４年間、課題学習における言語活動の明確化と充実という副題の下、研究を進めてきた。結果として、知識や技能の習得の過程で言語活動を充実することは、より知識理解を深めることになり、技能のより確かな習得につながることが解明された。さらに、数学的に考える力が高まることにもつながる。つまり、言語活動が不十分で学習内容だけを教え込みのように習得させると、「数学的基礎力」の高まりが不十分になる。このように、「数学的基礎力」は、充実した言語活動による学習内容の習得によって高まると考える。「数学的基礎力」は、イメージ図でいくつかの長方形で表されている。１枚の長方形は、各学年の各領域を表している。１学年４領域なので、長方形は、１２枚積み上げられているイメージである。「数学的基礎力」は、学年が進むごとに身に付く能力が増えつつ、高められていくと考える。

「数学的思考力」は、数学科の本質でもある、「未知の問題を解決する力」と捉える。「数学的基礎力」の中には、数学的な推論の方法、数学的な表現の方法、分類・整理、イメージ力、アルゴリズムといった、思考力が含まれている。「数学的基礎力」では、知識としての思考の方法であり、技能として使用してみるといった段階のレベルである。しかしイメージ図のように、経験を重ね繰り返し思考の方法としての技能を高めていけば、本来の意味である「未知の問題を解決する力」が得られると考える。そこで、「数学的思考力」＝「数学的基礎力」×（時間）として、３次元的な四角柱の体積として考える。

「数学的実践力」は、最終的に目指す能力である。イメージ図では、全てを囲むように表されているが、これはできあがる立体の形や質をイメージで表している。「数学的実践力」とは、数学のよさや効果の認識であり、数学を活用して考えたり判断したりしようとする態度である。「未知の問題を解決する力」としての能力が身に付いていく過程で、数学のよさを理解し、進んで数学を活用して判断しようという態度が育まれるのではないかと考える。生涯に渡り、様々な問題に直面したとき、自らの問題解決力をもって乗り越え生きていけるようにすることが、数学科が目指す本質である。

3　本質に迫る授業づくり

先に示したように、言語活動によって思考の伝え合いを行うことで、数学的に考える力が高まる。そこで日々の授業では、数学的な活動を通して思考方法を使って考察し、その内容を論拠するといった課題解決に、言語活動を軸として繰り返し取り組む必要がある。そうすることで「数学的基礎力」といった能力が徐々に高まる。本質である「未知の問題を解決する力」に迫るためには、「数学的基礎力」を十分に育んでいかなければならない。そのためにも、生徒が主体的に課題解決を図っていくような課題設定が吟味された授業を実践していくことが、本校数学科の目指す「教科の本質に迫る授業づくり」と考え、取り組んでいく。

新しい時代に必要となる資質・能力の育成をめざした数学の本質
－数学の本質と課題学習－

Ⅰ　新しい時代に必要となる資質・能力の育成と数学教育の本質

1「新しい時代に必要となる資質・能力」

平成２６年１１月の中央教育審議会における「初等中等教育における教育課程の基準等の在り方について」では、新しい時代に必要となる資質・能力について記された。「個別の知識や技能」「思考力・判断力・表現力」「学びに向かう力、人間性等」といった三つの柱を立て、各教科指導を通して育成するべき内容が以下のように示されている。

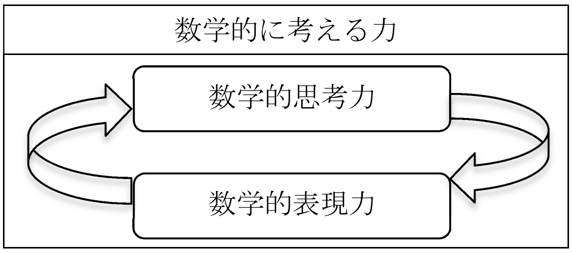
基礎力（何を知っているか、何ができるか） ・基本的な概念や原理・法則の体系的理解 ・事象を数学化したり、数学的に解釈・表現したりすること
思考力（知っていること・できることをどう使うか） 教科等の本質に根ざした見方や考え方等 ・事象を数学的に考察・表現し、数学的論拠に基づいて判断し問題を解決したり数学的な考え方を発展させたりする力
実践力（どのように社会・世界と関わりよりよい人生を送るか） 情意、態度等に関わるもの ・数学のよさの認識、数学的論拠に基づき判断する態度など

2　数学教育の本質と課題学習

本校数学科では、「これまで獲得した、数学的な知識や技能を基盤に、これまで学んだ数学的な見方や考え方を生かして活用したり、見通しをもって問題を解決したり、その過程を自ら振り返ったりすることで数学的な知識や技能・見方や考え方がさらに深まっていく。この一連の流れを繰り返すことで、数学のよさを理解し、数学を進んで活用する生徒の育成ができるのではないか」と考えてきた。これは、課題学習に対する数学科の考え方であるが、先に述べた三つの柱の内容と一致する。つまり、本校数学科が目指してきた課題学習そのものが、数学教育の本質に迫る授業形態であると考える。

3　数学教育の本質

本校数学科では、数学教育の本質を「未知の問題を解く能力の育成」と考える。未知の問題を解く能力とは、「数学的に考える力」のことである。ここでの数学的とは、論理的に物事を考えることであるが、本校数学科としての「数学的に考える力」を次の図で表す。



図のように、数学的に考える力とは、数学的に思考する力と数学的に表現する力の二つの力のこととした。図で示す矢印のように双方は密接な関係であり、切り離すことができない関係であると考える。また、言語活動により思考が可視化され表現力が高まり、表現が高まると思考が高められる。つまり、双方は言語活動によって相乗的に高まるといえる。ここで、数学的に思考する力と数学的に表現する力を下に示す。

数学的な思考力 ・数学的な推論　　・イメージ化 ・統一、一般化　　・アルゴリズム ・分類、整理
数学的な表現力 ・筋道立てて説明する

・論理的に説明する
・聞き取る、読み取る

ここで示した、「数学的な思考力」「数学的な表現力」を本校数学科版の２１世紀型能力の**数学的基礎力**とし、また「数学的に考える力」を**数学的思考力（未知の問題を解決する能力）**とした。数学的基礎力が高まった数学的思考力（未知の問題を解決する能力）を次のように示す。

数学的思考力「未知の問題を解決する力」
・数学的に考察・判断
・論拠に基づいて判断・表現
・考えを発展
・新たな発見
・新たな創造
・一般化

帰納や類推によって新しい命題が予想できても、表現できなければ未知の問題を解決できるとは言えない。また、論理的に説明できても、見いだすことができなければ未知の問題を解決できない。つまり「数学的に考える力」＝「未知の問題を解決する力」が育成されるためには、「数学的な思考力」と「数学的な表現力」の双方をバランスよく高めていく必要がある。

４　本質に迫る授業づくり

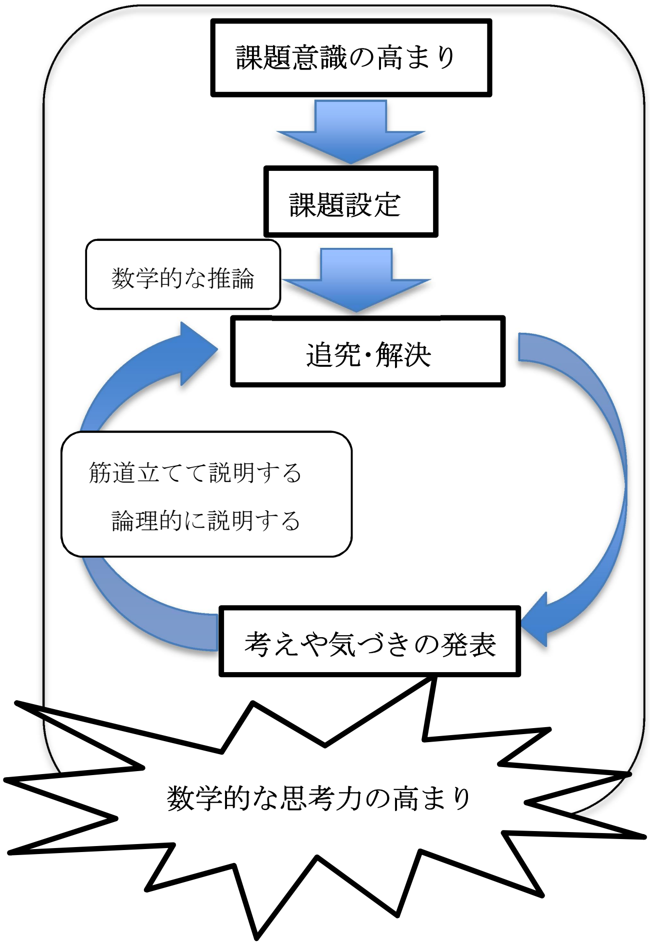
数学的活動を通し、効果的に言語活動を取り入れることで**数学的基礎力**を高める授業を実践してきた。また、その授業実践により、**数学的思考力**が育まれていくと考える。その授業とは、課題解決のために数学的に推論する場面を意図的に設定し、生徒が気付きや概念を表現し合う。また、表現された内容を論証し合い、課題を解決する。さらに、解決されたことから、推論し新しい命題を予想する。といったように、連続的に課題が生じるような探究的な授業を行うことで、より数学的な実践力が高まると考える。そこで、本校数学科の１年目の研究より気付いたことを以下に述べる。

５　１年目の研究より

中学校に入学したばかりの頃は、自分の意見を述べることを臆せず、学力を問わず自分の意見を述べる者が多い。しかし、中学２年の後半にもなると、自分の考えや気付きを他に発することができる者が減っていく。発達段階や数学の学習内容の難しさを考えると自然であるように思われる。しかし、学力の優劣に限らず自分の考えや気付きを述べることの楽しさを感じることができるのではないかと考え、研究に取り組んだ。一般的に、考え方を発表し合い、練り上げながら一つの答えに収束していく。この方法も一斉授業の中では、大切な方法論だと考える。しかし、答えを導き出す考え方も、ＩＴが常識となった現代では、予習により知識として考え方を手に入れることができる。そこで、考え方を知っているかどうかではなく、その場で考えていかないと解決できない場の設定を行った。答えの検討が微妙である課題のため、生徒の関心意欲は高くなる。自ずと、自分の考えや気付きを発言したくなる。他の考えをしっかりと聞かないと、理解ができなくなる。そうすると、発表者の説明が分かりにくい場合は質問が出て、発表者の説明が不十分であれば、追加の説明がし直されることが自然と行われる。さらに、発表者は聞いている相手から質問がでないように自問自答（数学的な推論）してから発表を行う。こ

れにより説明の論証レベルが高まっていく（論理的な説明）。また、言いたいことが端的になるように、説明の仕方も精選されていく（筋道立てた説明）。

学習指導要領にあるように、まずは自分の考えを発表することが重要であると考える。また、発表する回数も重要であり、回数をこなせるようにすることで、質問や追加の説明などが出てくる。つまり、このような状況を作るためには、それに見合った課題設定が必要であることが分かった。ただし、先に述べたように課題の難易度を上げればよいのではなく、「思考」をしてみたいと思えるような課題意識の高まりが何よりも重要である。手前味噌だが、これは本校が継続的に取り組んできた研究主題そのものである。



Ⅱ　本質に迫る授業実践

第１学年　「数学的思考力」を高める実践

１　題材　　空間図形

２　実践内容

前時の授業までに、牛乳パックを使った正四角柱から高さと底面の等しい正四角錐を作る。正四角錐を作るためには、正四角柱をどのように切り取っていくか考えながら取り組む。この経験は、直接立体を操作することで、空間の直線や平面の位置関係を実感できることと、空間の切り口や投影図を考える際の見通しとなると考えている。立体が完成すると、高さも底面も等しい正四角柱と正四角錐ができあがる。この際、どちらも底面をはずし容器の状態にする。本時では、正四角柱と正四角錐のどちらの体積が大きいか、作った立体を手にとって直観的に予測をすることを導入とする。正四角柱の容器に、正四角錐の容器がすっぽりと収まることを根拠に、正四角錐の体積のほうが小さいと論じるのは容易である。そこで、正四角錐の体積が、正四角柱の体積よりどれだけ小さいかという問いを投げかける。直観的に$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{5}$など様々な値がでてくるが、模型を使った推論を論証し合うことで、$\frac{1}{2}$より小さいが、$\frac{1}{4}$より大きいというおおよその範囲まで絞ることができる。さらに検証するために、どのような実験をすればよいか検討し、それに従って実験を行う。実験から、正四角錐の体積は、正四角柱の体積の$\frac{1}{3}$であることを自

ら見いだす。また、生徒それぞれが作った立体の高さが違っているが同じ実験結果が得られることから、正四角錐の体積は底面と高さが同じである正四角柱の体積の$\frac{1}{3}$であると結論付ける。これは、帰納的に見いだした推測であって、演繹による証明ではないが、ここでは正しいと結論づけていく。このような数学的な推論の方法も意図的にしかけることで、数学的な思考力を「思考方法」として技能的に培っていくことも目指す。

３　本時の学習

（１）目標

①正四角柱から正四角錐を切り出した過程を振り返ったり、模型を用いて実験による測定を行ったりして確かめることで、帰納的に正四角錐の体積が正四角柱の体積の３分の１という関係を見いだすことができる。(数学的な見方や考え方)

②予想した結果が正しいかどうか確かめるために、模型を用いたり実験による測定を行ったりする方法を理解するとともに、正四角錐の体積は正四角柱の体積の３分の１であることを理解することができる。(数量や図形などについての知識・理解)

（２）展開

①正四角錐の体積と正四角柱の体積の関係を考える。

②正四角錐は正四角柱の体積の$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、と直観的に推測。

③モデル（模型）から$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$にはならないことを推論し、論証。

④モデル(模型)だけで、体積の関係を見いだすことに限界を感じる。

⑤体積の関係を調べるための実験方法を考える。

⑥考えた実験方法から可能なもので取り組む。

⑦正四角錐は正四角柱の体積の$\frac{1}{3}$である実験結果を得る。

３　考察

具体物を操作し、数学的な推論で思考し、説明し合えたこの課題は、非常に生徒の関心意欲が高められるものであった。また、ある程度の課題の解決がなされたことで、さらなる課題意識が高まった。(②～④）そこで、実験により課題の解決が見通せると考えた生徒は、自ら考えた実験方法に主体的に取り組んだ。(⑤～⑥）実験結果は、知識の定着につながるだけではなく、次の推論ステップへつながる。次時では、実験結果は、帰納的な推論の結果であることに気付く。数学的な推論の種類を知り、今後の数学的な推論のレベルをさらに高めることになる。