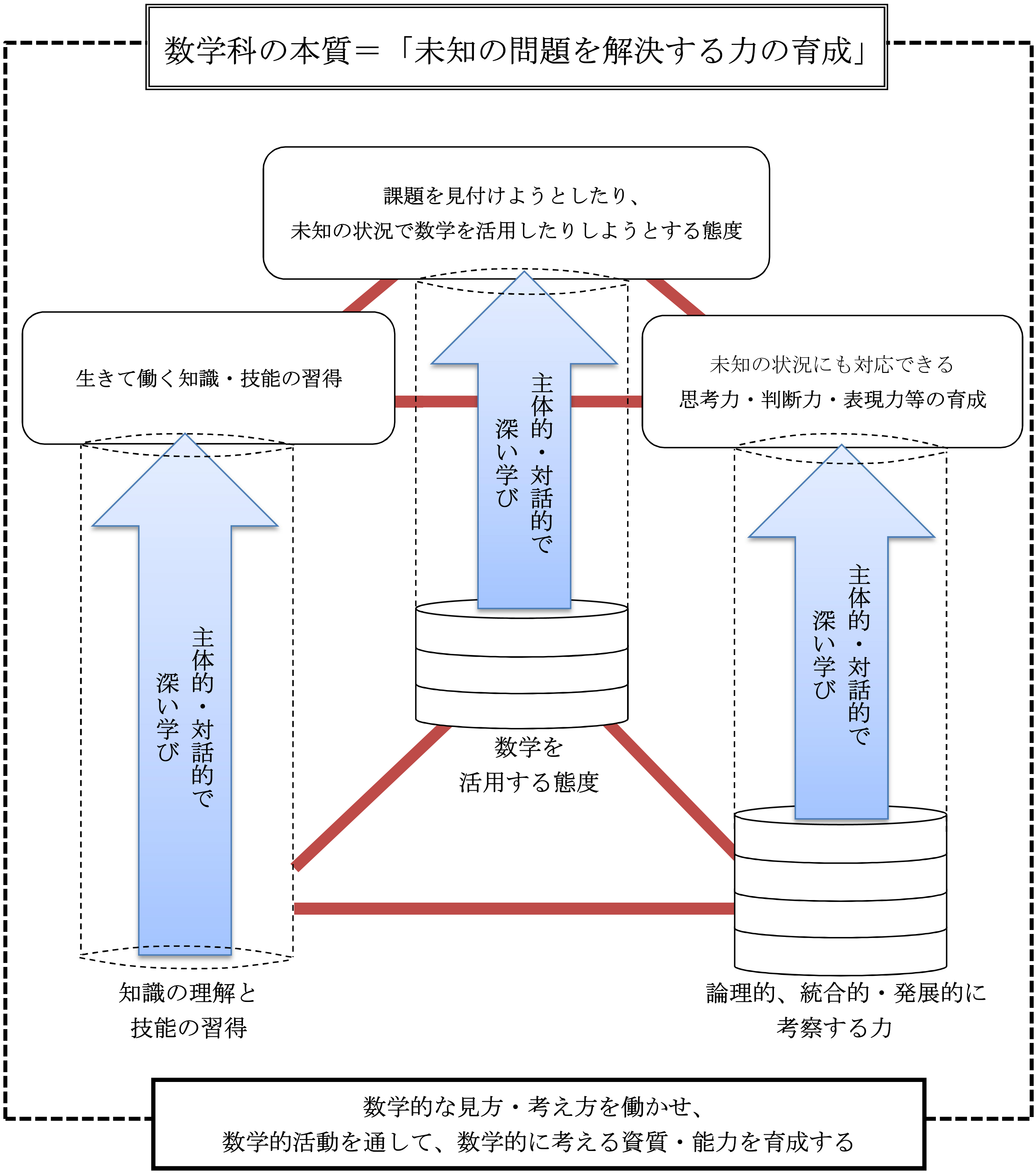
数学科の本質


数学科の本質＝「未知の問題を解決する力の育成」
課題を見付けようとしたり、
未知の状況で数学を活用したりしようとする態度
生きて働く知識・技能の習得
未知の状況にも対応できる
思考力・判断力・表現力等の育成
主体的・対話的で
深い学び
主体的・対話的で
深い学び
主体的・対話的で
深い学び
数学を
活用する態度
知識の理解と
技能の習得
論理的、統合的・発展的に
考察する力
数学的な見方・考え方を働かせ、
数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成する

数学科の本質に迫る授業づくり

１　数学科の本質だと考える３つの資質・能力

本校では「主体性の高まりを目指す課題学習」の主題のもと、「教科の本質に迫る授業づくり」を副題として研究を進めている。まず、教科の本質に迫るためには、数学科における教科の本質とは何かを明らかにしておく必要がある。本校数学科では、教科の本質として身に付けるべき資質・能力を、以下に示すように大きく分けて３つに分類して捉えている。

数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解や数学的な表現や処理の仕方の習得

以下、「知識の理解と技能の習得」とする

事象を論理的に考察したり、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察したりする力や事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力

以下、「論理的、統合的・発展的に考察する力」とする

数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度

以下、「数学を活用する態度」とする

２　３つの資質・能力の特性

「知識の理解と技能の習得」は、主に内容を示すことが多く、どんなことができるようになれば、身に付いたのかがわかりやすい。つまり、評価問題や授業の最中など、あらゆる場面で評価しやすいものであるといえる。それに対して、「論理的、統合的・発展的に考察する力」と「数学を活用する態度」はある事柄ができているか否かで判断するのではなく、思考そのものや態度は必ずしも可視化された事柄で表されるとは限らない。したがって、それらの能力や態度については、ただ漠然と「数学的な見方や考え方」や「数学への意欲」としがちである。

また、「知識の理解と技能の習得」はその単元で身に付けることがほとんどであり、単元の授業を実施する前には身に付けるべき知識はない状態、空の状態である。それに対して、「論理的、統合的・発展的に考察する力」と「数学を活用する態度」は、その単元の学習を行ったからといって、何も無かったところに、急激にある力が身に付くというものではない。その単元を行う前（例えば、中学校入学以前）からもある程度身に付いている力であり、誰もがすでにもっている能力をさらに伸ばすものであると考える。

３　数学的な考え方を念頭においた授業づくり

「数学的な考え方」を単に、直観やひらめき、具体的事象を抽象化する（＝数理的に考察する）こととして捉えていることをよく見かける。直観とは何なのか、具体的事象を抽象化するとは、どのような思考が関係しているのかを明らかにしなければ、教師は生徒の偶然の気付きによって授業を進めることになってしまう。生徒が自らの手で課題を解決していくためには、偶然のひらめきではなく、論理に裏打ちされた必然性が求められる。しかし、既習の内容をどのように生かすのかを教師自身が知っていないと、教材を組むことはできない。さらに、自力で解決できない生徒に対する支援も曖昧なものになってしまう。数学的な考え方とは何なのかを明確にし、意識化して授業づくりに取り組むことが重要である。

実践事例１

第３学年　Ｂ図形「三平方の定理」の実践

１　単元

三平方の定理

２　数学科の本質と本実践の関わり

身に付けるべき数学的な考え方を明確にし、それらを引き出すための発問をすることで、より見通しをもった課題解決ができる。

本単元において身に付けるべき数学的な考え方は数多くある。だからこそ、毎回の授業で身に付けるべき数学的な考え方を明確にしておくことが肝要である。また、生徒がつまずいたときに、直接役立つ知識や技能についての発問をするのではなく、その考え方を引き出すための発問が必要であると考える。その中でも特に、多くの場合に役立つような一般的な発問をしていくことによって、生徒自身がつまずきを克服していけるような発問が必要である。例えば、「同じ考え方を使うことはできるか」、「いつでもいえるようにできないか」などの発問は、図形領域のみならず、他の領域でも自分自身に問いかけやすいものになる。そこで本時では、主に以下の２つの数学的な考え方を身に付けさせたいと考えた。

ア　帰納的な考え方

格子点上の線分の長さを求めた過程を改めて振り返り､三平方の定理の概念を見いだす過程を通して、帰納的な考え方が身に付くと考える。そこで、「ある格子点と別の格子点を結んだ線分の長さを求めることはできるか」という発問をし、生徒達から、正方形の面積を、４つの直角三角形と、その内部にできる正方形に分割して求めることや、正方形の面積を求める過程を表した式をもとに、「同じ考え方を使えば、どのような場合でも求めることができる」という考え方を引き出すことができると考える。

イ　一般化の考え方

三平方の定理の概念を見いだした後、「いつでもいえるようにできないか」という発問をすることで「文字を使って一般化したらよい」という考え方を引き出したいと考える。そして、直角をはさむ２辺の長さを文字に置いて、斜辺の長さを求める式をつくることができると考える。

３　実践

（１）単元について

三平方の定理は、簡潔な美しさや活用の広さなどから、昔から多くの人々が関心をもち、その証明も数百種類以上あるといわれている。直角三角形の３辺の長さの関係を表す代数的な見方と、直角三角形の各辺を１辺とする３つの正方形の面積の関係を表す幾何学的な見方があるため、「数と式」領域と「図形」領域とを統合的に捉えることが可能な単元である。また、直角三角形の２辺から残り１辺の長さを求めることや、測量などの実生活で活用されているという実際的な視点、無理数の発見に伴うギリシャ数学の歴史的な背景や逸話による哲学的な心など、その重要性は様々な視点から伺うことができる。

三平方の定理の活用場面は実に広い。長方形や直方体の対角線の長さ、様々な三角形の面積、円錐や角錐の体積、座標平面上の２点間の距離など、授業の中で触れられてはいたものの、なかなか求めることができなかったものが、三平方の定理を学ぶことで解決が可能になる。

平方根の学習の導入では、格子点が書かれた平面を用いて、基準となる格子点と各格子点を結ぶ線分の長さを求める課題に取り組んでいる。その過程では、求めたい線分を１辺とする正方形の面積を４つの直角三角形と１つの正方形に分割して求め、それを手がかりに線分の長さに迫っている。線分の長さは既習の数の概念だけでは表すことができないことを確認した後、根号を用いて長さを表すことを紹介し、根号の必要性を感得させた。

本時は、長さを求めたい線分を１辺とする正方形の内部にできる直角三角形に着目させることで、直角三角形の斜辺は、直角をはさむ２辺の長さから求められることに気付かせ、三平方の定理の導入を図りたい。また、平方根の学習を既習の内容や方法とし、三平方の定理を見いだすことで、既習の内容や方法を生かして新たなものを創り出していくという、数学のよさも味わわせたい。

（２）単元の目標

○　三平方の定理の美しさや背景にある数学的な見方や考え方に触れ、数学のよさを味わうことができる。　　（数学への関心・意欲・態度）

◎　三平方の定理の証明を考えたり、図形の中に直角三角形を見いだし三平方の定理を活用して

考えたりすることができる。

（数学的な見方や考え方）

○　三平方の定理の証明の過程を適切に表現したり、三平方の定理を活用して長さや面積を求めたりすることができる。　　（数学的な技能）

○　三平方の定理やその逆の定理の意味を理解し、三平方の定理を活用すると、長さや面積を求められることを理解することができる。

（数量や図形などについての知識・理解）

（３）全体計画（全９時間）

①　三平方の定理・・・・・３時間（本時１／３）

②　三平方の定理の逆・・・１時間

③　三平方の定理の利用・・５時間

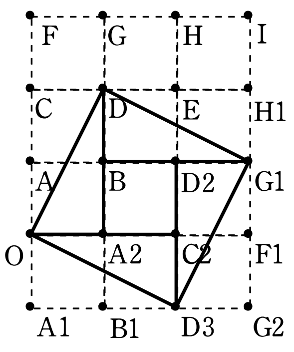
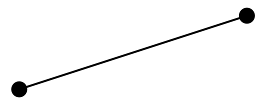
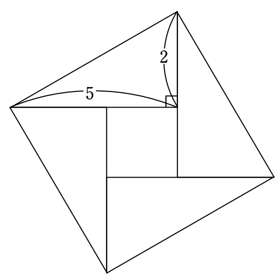
4　本時の学習（全１／９時間）

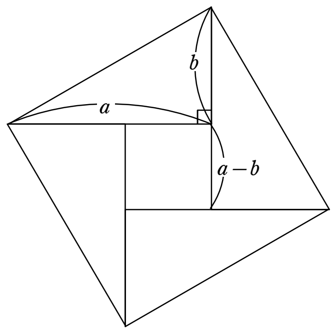
（１）指導目標

①　２点を結ぶ線分の長さを求めるには、何が分かればよいのかを明確にし、既習の内容や方法を生かして課題解決することのよさを味わうことができる。　（数学への関心・意欲・態度）

②　平方根の学習における既習の内容や方法を生かして、直角三角形の直角をはさむ２辺の長さが分かれば、斜辺の長さが求められることを見いだすことができる。（数学的な見方や考え方）

（２）　展開

解決への過程	指導上の留意点
○OD の長さを求めてみよう。  ・OD を１辺とする正方形をかく。正方形の面積は、４つの直角三角形と１つの正方形の面積の和で求められるので、	・平方根の学習を想起させ、格子点の意味などを確認する。 ・O、D、G1，D3 を結んでできる四角形が、正方形になることを確認する。 ・式でも、正方形の面積の求め方を表すように促す。
$2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 4 + (2-1)^2 = 5$ よって　OD $=\sqrt{5}$ ○ある格子点と別の格子点を結んだ線分の長さを求めることはできるか。 ・この考え方を使えば、どのような場合でも求めることができる。	
２点を結ぶ線分の長さを求めるにはどのように考えたらよいだろうか。	
 ・基準があれば求められる。 ・２点を結んだ線分を１辺とする正方形の面積が分かれば求められる。 ・直角三角形の面積と内部の正方形の面積が分かれば求められる。 ・直角三角形の直角をはさむ２辺が分かれば求められる。 ○直角三角形で、直角をはさむ２辺の長さが５と２のとき、斜辺の長さを求めてみよう。  $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times 4 + (5-2)^2$ $= 29$ よって斜辺の長さは　$\sqrt{29}$	・格子点があった場合と比較することで、何が分からなくなったために、線分の長さが求められなくなったのかを段階的に明らかにしていく。 ・どの部分が分かれば線分の長さが求められるのかを、言葉と図で明らかにする。 ・図と式で、正方形の面積の求め方を表させる。 ・求めたい線分の長さがこのように無理数になることがあることから、実測には限界があることにふれたい。
直角三角形では、直角をはさむ２辺の長さがわかれば、斜辺の長さはどんな場合でも求められるだろうか。	

 $\frac{1}{2}ab \times 4 + (a-b)^2$ $= 2ab + a^2 - 2ab + b^2$ $= a^2 + b^2$ よって斜辺の長さは $\sqrt{a^2 + b^2}$ 〇直角三角形で、直角をはさむ２辺の長さが５と３の時、斜辺の長さを求めてみよう。 $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9}$ $= \sqrt{34}$ 〇振り返りカードを記入する。	・文字を使えば一般化できることに気付かせる。 ・多項式の展開や根号を含む式の計算については、学び直しの機会ととらえ、丁寧に指導する。 ・直角三角形の３辺に着目させ、斜辺の長さを求めさせる。

（３）本時の実際

【ア　帰納的な考え方を引き出す場面】

生徒A：線分 OD は、OD を１辺とする正方形をかくことで求まります。正方形の面積は、４つの直角三角形と１つの正方形の面積の和で求められるので、$2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 4 + (2-1)^2 = 5$

よって　OD $=\sqrt{5}$　です。いいですか？

全　員：いいと思います。

教　師：では、ある格子点と別の格子点を結んだ線分の長さを求めることはできますか？

生徒B：今と同じ考え方を使えばできると思います。

教　師：Bさんが言った「今と同じ考え方」とは何ですか？（数名が挙手する）

教　師：ではCさんお願いします。

生徒C：求めたい線分を１辺とする正方形をつくって、４つの直角三角形と１つの正方形の面積の和を求めることだと思います。(多くの生徒がうなずく)

教　師：なるほど。じゃあ、OG、OH、OI はこの考え方で求められるんだね？（多くの生徒がうなずく）

＜アに対する考察＞

生徒Bの「今と同じ考え方を使えばできる」という意見によって、比較的多くの生徒が納得したと考える。

帰納的な考え方に触れることは、これまでの学習の中でも多く触れてきている。例えば、連続する２つの偶数の和は４の倍数であることを予想するときに

$$2^2 + 4^2 = 20$$
$$4^2 + 6^2 = 52$$
$$6^2 + 8^2 = 100$$

というふうに同じ考え方で、計算を並べてみることや、三角形の内角の和を調べるために、いくつかの三角形をかいて分度器で角度を測ることにより、それぞれの内角の和が１８０°であることを説明してきている。それらの経験があったからこそ、帰納的な考え方を引き出しやすい場面であった。

【イ　一般化の考え方を引き出す場面】

生徒J：直角をはさむ２辺が２と５のとき、斜辺の長さは、$\sqrt{29}$ になります。いいですか？

全　員：いいと思います。

教　師：なるほど。直角をはさむ２辺だけで、求めたい線分の長さが分かるんだね。でもこれは、たまたまかもしれないよね？

生徒K：きっと、どんなときでもいえると思います。

教　師：じゃあ、いつでもいえるようにするためにはどうしたらいいのかな？

全　員：（何人かの生徒）文字で一般化するといい。

教　師：なるほど。じゃあ、直角をはさむ２辺をa, bとして斜辺の長さを求めてみよう。

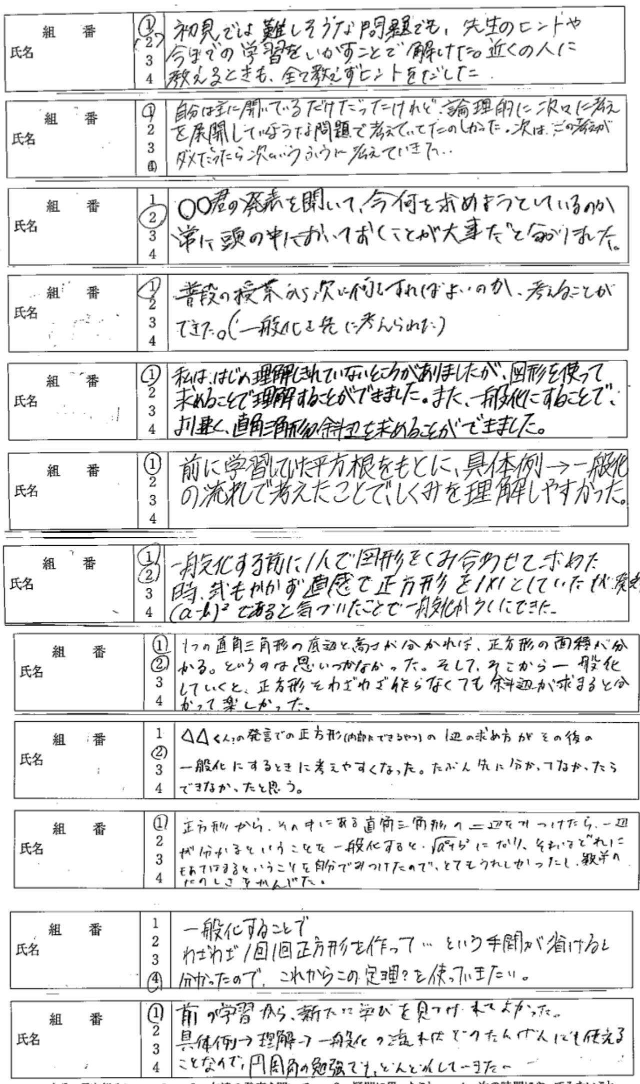
＜イに対する考察＞

乗法公式や根号を含む計算など、文字で一般化することは、これまでに何度も学習してきていることなので、生徒達からスムーズに意見が上がった。以下の本時の振り返りカードから、文字で一般化することに意義を感じている生徒が多いことが分かる。

５　成果と課題

以下の内容は、本時の授業後、生徒が書いた振り返りカードである。なお、番号に〇がついているのは、以下の視点で振り返りを書いている。

１　自分の取り組みについて
２　友達の発表を聞いて
３　疑問に思ったこと
４　次の時間にやってみたいこと


初見では難しそうな問題でも、先生のヒントや今までの学習をいかすことで解けた。近くの人に教えるときも、全て教えずヒントをだした。

自分は主に聞いてるだけだったけれど、論理的に次々に考えを展開していくような問題で考えていてたのしかった。次はこの考えがダメだったら次のこうふうに考えていきたい。

○○君の発表を聞いて、今何を求めようとしているのか常に頭の中においておくことが大事だと分かりました。

普段の授業から次に何をすればよいのか、考えることができた。(一般化を先に考えられた)

私ははじめ理解されていないところがありましたが、図形を使って求めることで理解することができました。また、一般化することで、より早く、直角三角形の斜辺を求めることができました。

前に学習していた平方根をもとに、具体例→一般化の流れで考えたことで、しくみを理解しやすかった。

一般化する前に1人で図形をくみ合わせて求めた時、式もかかず直感で正方形を1マスとしていた…(a-b)²であると気づいたことで一般化がらくにできた。

1つの直角三角形の底辺と高さが分かれば、正方形の面積が分かる。というのは思いつかなかった。そして、そこから一般化していくと、正方形をわざわざ作らなくても斜辺が求まると分かって楽しかった。

△△くんの発言での正方形の1辺の求め方がその後の一般化にするときに考えやすくなった。たぶん先に分かってなかったらできなかったと思う。

正方形から、その中にある直角三角形の二辺をみつけたら、一辺が分かるということを一般化すると、√になり、それはどれにもあてはまるということを自分でみつけたので、とてもうれしかったし、数学のたのしさをかんじた。

一般化することでわざわざ1回1回正方形を作って…という手間が省けると分かったので、これからこの定理?を使いたい。

前の学習から、新たに学びを見つけれてよかった。具体例→理解→一般化の流れはどの単元にも使えることなので、円周角の勉強でも、どんどん活かしていきたい。

1 自分の取り組みについて　2 友達の発表を聞いて　3 疑問に思ったこと　4 次の時間にやってみたいこと

（1）視点①　教科の本質をふまえて付けたい力を明確にした授業づくりに関わること

数学的な知識や技能は、評価問題や普段の授業の様子から見て取ることができるが、数学的な考え方は、難解な評価問題を解かせることで、生徒の力を判断していることがこれまで多かった。しかし、今回の実践で身に付けるべき数学的な考え方を明確にしたことで、授業中の生徒達の反応を意識して観察することができた。振り返りカードの「今までの学習を活かして」や「平方根の学習をもとに具体例→一般化」という記述や「一般化することで・・・手間が省ける」という記述は、数学的な考え方の有用性を感じたからこその記述であると感じ取れた。

また問題を解決するにあたって、数学的な考え方を明確にするだけでなく、数学的な態度についても今後は明確にしていく必要性を感じた。特に、今回の実践では、生徒達が見通しを立てる場面（２点を結ぶ線分の長さを求めるには、直角三角形の２辺が分かればよいというところ）が、最も時間を要した（視点③に詳しく掲載）。今後は、中学校数学科の目標にもある「学びに向かう力、人間性等」という点につながるであろう、身に付けるべき数学的な態度を研究し、分類・整理していきたい。

（2）視点③　「問いかけ」により思考・判断・表現を促す授業づくりに関わること

今回の実践では、生徒達が、比較的慣れ親しんでいる数学的な考え方に関する発問をしたので、スムーズに意見が出てきた。このことは、領域を問わず継続的に発問することで生徒達に力がついていくと考えられる。今後も継続していきたい。

しかし一方で、最も引き出すことが難しかったのは、課題提示から解決の見通し（２点を結ぶ線分の長さを求めるには、直角三角形の２辺が分かればよいというところ）を立てるまでの部分であった。「何が分かればよいのか？」と繰り返して問うたが、情報を整理し、議論を焦点化し、全員が同じ方向で課題を解決していける一方で、生徒の思考を教師の予定している方向に誘導しているようでもあり、正答を待っているようでもある。だから、自ら課題解決できるように、前時の格子点の図を操作できるようにしたり、教材の流れを変えたりすることも考えられる。今後は、単元を貫いて思考できるこの教材のよさを生かしつつ、継続的に様々な場面で数学的な態度を身に付けさせる発問をしていく必要性があると実感した。