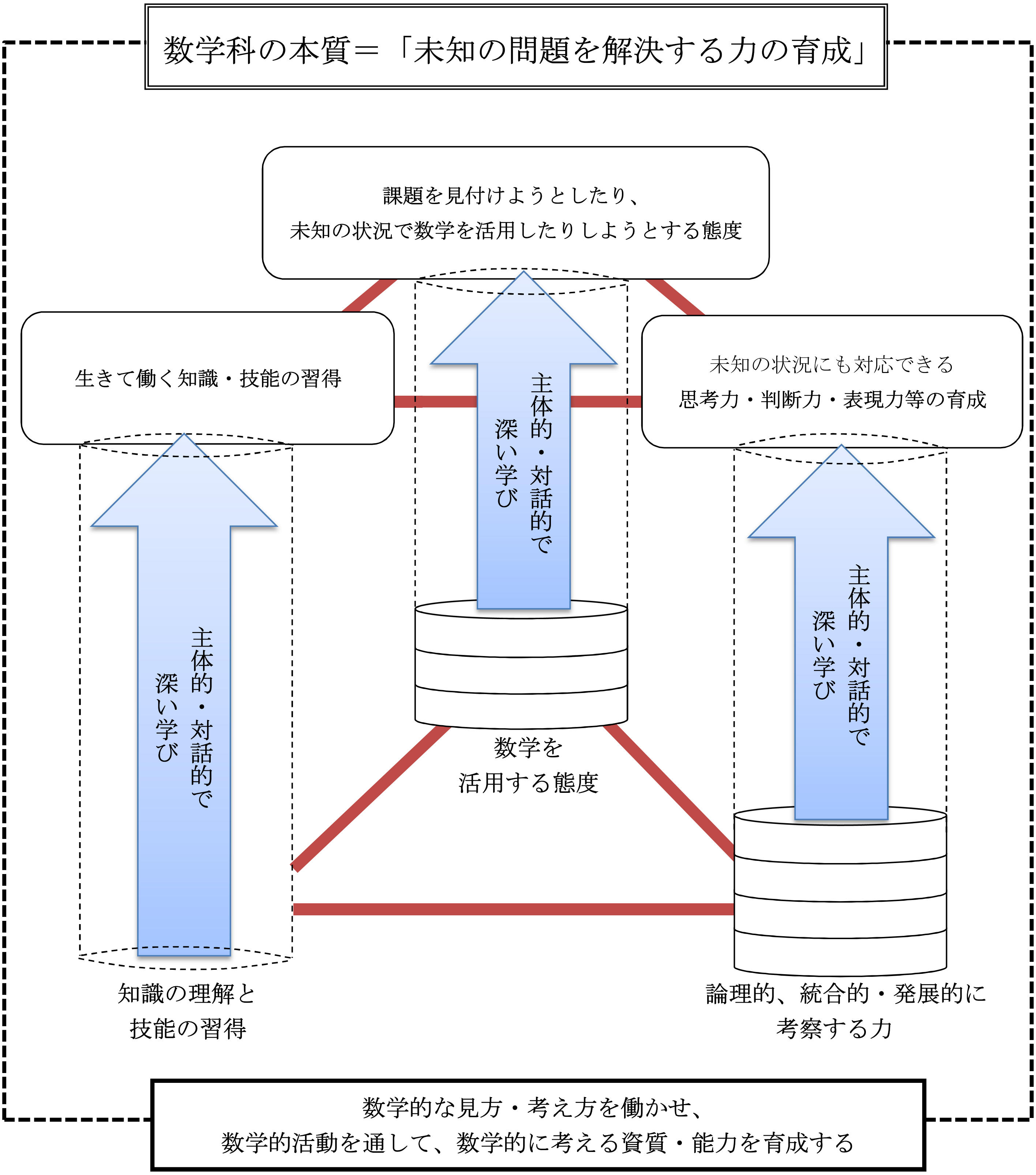
数学科の本質


数学科の本質＝「未知の問題を解決する力の育成」
課題を見付けようとしたり、
未知の状況で数学を活用したりしようとする態度
生きて働く知識・技能の習得
未知の状況にも対応できる
思考力・判断力・表現力等の育成
主体的・対話的で
深い学び
主体的・対話的で
深い学び
主体的・対話的で
深い学び
数学を
活用する態度
知識の理解と
技能の習得
論理的、統合的・発展的に
考察する力
数学的な見方・考え方を働かせ、
数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成する

１　数学科の本質

本校数学科では、数学科の本質を「未知の問題を解決する力の育成」と考える。この力の育成ためには、数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる必要がある。(「学習指導要領解説　数学編」より引用）これらを総合的にかつ継続的に高めていくことで、「未知の問題を解決する力」が育成される。

２　数学科の本質に迫るために育成すべき３つの資質・能力

数学科の本質に迫るために必要な資質・能力は、大きく分けて、以下に示す３つに分類できる。

数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解や数学的な表現や処理の仕方の習得

以下、「知識の理解と技能の習得」とする

事象を論理的に考察したり、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察したりする力や事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力

以下、「論理的、統合的・発展的に考察する力」とする

数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度

以下、「数学を活用する態度」とする

これらの資質・能力は新たなものではなく、今までの研究でも大切にしてきたものである。そして、３つの資質・能力を高める上で、それぞれの特性による違いを明確にしておく必要があると考えた。

３　３つの資質・能力の違い

「知識の理解と技能の習得」は、主に内容を示すことが多く、どんなことができるようになれば、身に付いたのかがわかりやすい。つまり、評価問題や授業の最中など、あらゆる場面で評価しやすいものであるといえる。それに対して、「論理的、統合的・発展的に考察する力」と「数学を活用する態度」は、ある事柄ができているか否かで判断するものではなく、必ずしも可視化された事柄で表されるとは限らない。したがって、それらの能力や態度については、ただ漠然と「数学的な見方や考え方」や「数学への意欲」としがちである。

また、「知識の理解と技能の習得」は、その単元で身に付けることがほとんどであり、単元の授業を実施する前には身に付けるべき知識はない状態、空の状態である。それに対して、「論理的、統合的・発展的に考察する力」と「数学を活用する態度」は、その単元の学習を行ったからといって、何もなかったところに、急激にある力が身に付くというものではない。その単元を行う前（例えば、中学校入学以前）からもある程度身に付いている力であり、誰もがすでにもっている能力をさらに伸ばすものであると考える。

数学的な考え方を明確にした、教科の本質に迫る授業づくり

～課題学習を通して教科の本質に迫る手立て～

１　先行研究

１年目の研究では、授業づくりを行う際に、生徒がその場で考えないと解決できない場の設定（課題の設定）を重視して研究を行った。それによって、自分の考えや気付きを発言したくなる、他の考えをしっかりと聞くようになる、説明が分かりにくい場合は質問が出るようになる、発表者の説明の仕方が精選されていく、などの活動の充実につながることが確認された。改めて課題の吟味が大切であるとわかった。２年目の研究では、授業づくりを行う際に、数学的基礎力としていた、方法知や内容知を明確にすることを重視した。授業の場面での切り返しの発問や生徒の思考を促す手立てを考える際に有効に生かすことができた。一方で、生徒が課題を自らの力で解決するには、既習の内容や方法を生かすことになるが、既習の方法として「帰納、類推、演繹」のいずれの方法を使うのか、また、それ以外の数学的な見方や考え方を使うのか、などと迷ったこともあった。そこで、数学的な見方・考え方に焦点を当てた研究を行うこととした。

２　本校の課題学習の役割

「知識の理解と技能の習得」は、数学的活動を通して行うことに重要な意味がある。数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則をただ理解すればよいというものではない。単に知識や技能を得るのではなく、生きて働くような知識や技能であることが求められている。得る結論が同じでも、それを獲得する過程が違えば、その結論のもつ価値が違ってくる。例えば、$\sqrt{a}^2 = a$という原理は「根号の中を２乗すると根号がはずれる」と単純に法則化できる。この段階ではただ単に原理・法則を機械的に記憶しているに過ぎない。$\sqrt{a}$ とはどのような意味をもち、どのような場面で使うことができるのかということも含めて理解していることが、この根号を含む数の概念が生きて働く知識になった状態であるといえる。

本校の課題学習は、課題意識の高まりによって生じた「課題」を既習の内容や方法を生かして自ら考え、解決する学習である。課題を設定する際には、本時で身に付けさせたい知識や技能を獲得できるか、既習の内容や方法を生かして自ら解決できるかといったことに留意して行われる。生徒は必要感をもって原理・法則を見いだすわけであるから、何に使われるのかということを常に意識しながら学習することになる。また、既習の内容や方法を組み合わせて追究することで、他のどの原理と関連があるのかやその原理にどんな意味があるのかといったことにも自然に触れることになる。このことからも、課題学習を推進することによって、「知識の理解と技能の習得」が生きて働くものとなり、「論理的、統合的・発展的に考察する力」や「数学を活用する態度」がより一層高めらることになる。

また、新学習指導要領では、「数学科の目標にある資質・能力は、数学的な見方・考え方と数学的活動に相互に関連をもたせながら、全体として育成されるべき」と述べられており、現行に引き続き数学的活動の重要性を説いている。これは、本校数学科の考える３つの資質・能力のすべてにおいて、それらを育成する際は、数学的な見方・考え方と関連させながら（数学的活動を通して）行うということである。本校課題学習の一連の流れは、まさに数学的な見方・考え方を生かして主体的に行われるものであり、数学的活動にほかならないといえる。

３　数学的な見方・考え方とは

「数学的な見方・考え方」は漠然としていて、具体的に捉えたり、意識化したりすることは少ないように思う。「数学的な見方・考え方」を単に、直観やひらめき、具体的事象を抽象化する（＝数理的に考察する）こととして捉えていることをよく見かける。では、直

観とは何なのか、具体的事象を抽象化するとは、どのような思考が関係しているのかを明らかにしなければ、教師は生徒の偶然の気付きによって授業を進めることになってしまう。数学的な見方・考え方を働かせ３つの資質・能力を高めるためには、偶然のひらめきではなく、論理に裏打ちされた必然性が求められる。生徒が自らの手で課題を解決していくためには、既習の内容を生かすことになる。しかし、既習の内容をどのように生かすのかを教師自身が知っていないと、教材を組むことはできない。さらに、自力で解決できない生徒に対する支援もあいまいなものになってしまう。そこで、数学的な考え方とは何なのかを明確にし、意識化して授業づくりを行うことにした。数学的な考え方は以下に示したように分類している。

数学的な考え方の分類

・帰納的な考え方
・類推的な考え方
・演繹的な考え方
・統合的な考え方
・発展的な考え方
・抽象化の考え方
・単純化の考え方
・一般化の考え方
・特殊化の考え方
・記号化の考え方
・数量化、図形化の考え方

４　授業づくり

（１）教科の本質に迫るねらいの設定

授業のつくり方は様々あるが、本校数学科では例えば次のように進めている。まず最初に、研究の視点の１つ目にもあるように、「身に付けるべき資質・能力を明らかにすること」である。本時で身に付けさせたい概念や原理・法則は何かを考えることになる（本時のねらいを決める）。必ずしも本時のねらいが概念の獲得になるとは限らない（他に、既習の内容を使って数学を活用しようとする態度を育てるなど）が、一般的には数学の授業では何らかの概念を学ぶことが多い。ここで、身に付けさせる概念は教師が一方的に教え込むのではなく、自ら見いださせる必要がある。その際には、グループ学習などの対話形式の活動や自分の考えを伝えあう学習形態も重要になってくる。

しかし、ねらい自体が説明することや協同的に活動することになってしまっている例をよく見かける。評価の観点に「関心・意欲・態度」という項目があったり、「思考力・判断力・表現力を高める」ことが目標であったりするためだと思われる。本時に身に付けさせたい資質・能力が『教科の本質』に迫ったものになっているかということが非常に重要になってくる。そういう意味でも、教科の本質とは何か、その本質からはずれていないかといったことは、授業をつくる上で何度も振り返ることが多い。

（２）数学的な考え方を意識した学習課題の設定

単元全体や本時のねらいを達成するために、どのような素材を用いたり、場面を設定したりすることが興味を引き、生徒に疑問や課題が生じるかを考える。その際に重要視していることは、既習の内容は何であるか、それをどのように生かすことでその概念に気付かせられるのか、ということである。ただ、何となく気付かせるのではなく、考えざるを得ない状況をつくったり、教師の投げかけにより思考を促したりして、生徒が自ら解決できる課題でなければ、課題学習としての授業は成立しない。「○○させることで、△△の考え方を使って、□□に気付かせる」のように、気付くための根拠（既習の内容）と手立て（数学的な考え方等）を常に意識しながら課題を設定する。

（３）数学的な考え方を用いて思考を深める問いの設定

問いについては様々なものがあるが、学習課題も広い意味では問いの１つであり、本時における最も重要な問いといえる。その学習課題については前述したとおりである。他にも、授業の最初には課題意識を高め、課題を設定するまでの問いや全員に既習事項やまとめ

を行う際に確認する問いなどがある。その中で主に、課題を追究し深い学びにつながるよう思考を活性化させるための問いについて研究を進めている。

まず、課題を追究する場面で見通しをもたせるための問いかけがある。その際には前述した「数学的な考え方」のどの思考法を用いることで課題解決できるかを考え、その思考法に結びつくような問いかけを行う。例えば、１学年で学習する正負の数の乗法のきまりについて考える場面では、(正)×(負)の結果について小学校での乗法のきまりを想起させるよう問いかける。いくつか結果を並べると、積は被乗数分だけ変化していることから、類推的な考え方を用いて(正)×(負)＝(負)という見通しがもてる。

また、自分の考えを他者に伝える場面で、簡潔・明瞭・的確な表現になるよう整理したり、生徒のおぼろげな疑問を取り上げることで新たな課題意識を生み出したりする問いかけがある。例えば、３学年で学習する２次方程式の解き方を考える場面では、$(x-3)^2 = 16$、$(x-3)^2 + 6 = 16$、$x^2 - 6x + 9 = 20$ のそれぞれを解いた後、全部を見て気付くことはないかと問いかける。統合的な考え方を用いて２次方程式は左辺を$(\ \ )^2$にすればよいという共通点を見いだすことで、本時で学習した概念を的確に捉えることができる。

このように、数学的な考え方を用いて思考が深まるような問いを考えるためには、教師が「数学的な考え方」について深く理解していないと進めることはできない。「数学的な考え方」に注視して行った実践事例を次に紹介する。

実践事例１　図や式から数学的な考え方を用いて推論する授業展開の工夫

Ⅰ　数学的な考え方を用いて思考した主な場面

場面１

図や式から原理･法則が正しいかどうかを予想し､複数の例をあげ帰納的に推論することで、新たな性質を自ら見いだしていく場面。

場面２

「加法は根号の中の数をそのままたしてはいけない」ということから、加法にどんなきまりがあるのか、図や式から一般化の考え方を用いて思考することで、加法の計算方法を習得していく場面。

Ⅱ　生徒の思考の流れとその時に使ったと予想される数学的な考え方

新たな数（根号を使った数）を見つけたときには、どんなことを学習してきたか。

↓

大小と四則について考えた。

↓

分数の乗法・加法はどのように計算したか。

↓

乗法は、分子同士、分母同士をそのまま計算できた。加法は、通分して計算するので、そのまま計算できない。

↓**類推的な考え方**

課題　格子点を結ぶ線分の長さの関係から、平方根の大小やルートどうしの乗法と加法についてどのようなことがいえるだろうか。

↓**一般化の考え方**

大小については根号の中の数が大きいほど大きい。

↓**帰納的な考え方、特殊化の考え方**

乗法は根号の中の数をそのままかけてもよいが､加法は根号の中の数をそのままたしてはいけない。

↓

新たな課題　加法にはどのようなきまりがあるのか。

↓**帰納的な考え方、統合的な考え方**

簡単に見当たらない。

Ⅲ　研究内容

１　場面１について

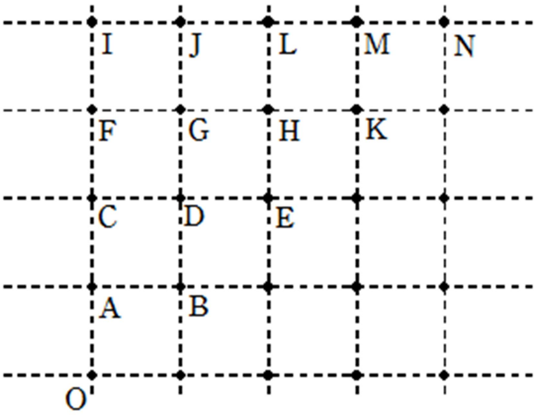
本単元における数学科の本質に迫るねらいの１つ目は「既に学習した計算の方法から、平方根の四則についての原理･法則を自ら見いだせたという数学的活動の楽しさを実感させること」であると考えた。線分の長さの関係式と、整数は根号を用いて表せるという既習を用いて､ルートどうしの乗法と加法の原理･法則について予想する。そして、予想した原理･法則が正しいかどうか複数の例をあげ帰納的に推論することで、新たな性質を自ら見いだすという数学的活動の充実を図ることができると考えた。

２　場面２について

本単元における数学科の本質に迫るねらいの２つ目は､「平方根の概念やその四則の原理・法則についての理解を深めること」であると考えた。ルートどうしの加法について、ただ知識・技能を習得するのではなく、一般化の考え方を用いることで、より生きて働く知識・技能になると考えた。

Ⅳ　実際の授業の流れ

1　本時の展開

学習内容	解決への過程	指導上の留意点
既習事項	○点Ｏから各格子点までの長さを求めよう。  OA＝1　OB＝$\sqrt{2}$　OC＝2 OD＝$\sqrt{5}$　OE＝$\sqrt{8}$，$\sqrt{2}\times2$ OF＝3　OG＝$\sqrt{10}$　OH＝$\sqrt{13}$ OI＝4　OJ＝$\sqrt{17}$　OK＝$\sqrt{18}$，$\sqrt{2}\times3$ OL＝$\sqrt{20}$，$\sqrt{5}\times2$　OM＝5 ON＝$\sqrt{32}$，$\sqrt{2}\times4$	◇アルファベットのつけ方は、点Ｏから近い順に、A、B・・・とつけていったことを確認する。 ◇OE、OK、OL、ON の長さについては、２通りの考え方があったことを確認する。 ◇分数どうしの乗法や加法はどのように計算したかを想起させ、安易に計算してはいけないことに気付かせ、課題意識を高めたい。　**（類推的な考え方）** ◇$\sqrt{\ }\times\sqrt{\ }$＝？、$\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$＝？を見せることで、ルートどうしの計算について考えることを意識付ける。
課題の設定・把握	格子点を結ぶ線分の長さの関係から、平方根の大小やルートどうしの乗法と加法についてどのようなことがいえるだろうか	
課題の追究・解決	【大小について】 ・アルファベット順に点Ｏと結んだ線分の長さは長いので、根号の中の数字が大きいほど、平方根は大きくなる。 よって、$a>b$ ならば $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 【乗法について】 ・2OB＝OE より $\sqrt{2}\times2=\sqrt{8}$ 　したがって $\sqrt{2}\times\sqrt{4}=\sqrt{2\times4}$ ・2OD=OL より $\sqrt{5}\times2=\sqrt{20}$ 　したがって $\sqrt{5}\times\sqrt{4}=\sqrt{5\times4}$ 　よって、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$	◇数学的な表現のよさを感じさせるためにも、推測したことを、文字で一般化することが望ましいが、概念の理解を優先するため、言葉での説明でもよいこととする。 **（一般化の考え方）** ◇困っている生徒には、紙テープで線分を取り出し、目に見える量にすることで実感を伴わせ、解決への手がかりとさせる。 ◇一つの例だけをあげている生徒には、複数の例が必要であるという視点をもたせることで、帰納的推論の素地を培う。 **（帰納的な考え方）、（特殊化の考え方）** ◇発表する生徒には、根拠となる線分の関係を明らかにしながら説明させることで、聞き手の理解を深めたい。

課題の定着・発展	【加法について】 ・2OB＝OE より $\sqrt{2}\times 2=\sqrt{8}$ したがって $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ ・OB＋OE＝OK より $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$ よって、$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ にはならない。 加法にはどのようなきまりがあるだろうか 【加法のきまり】 ・2OB＝OE より $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$ $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2\times 4}$ ・OD＋DL＝OL より $\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{20}$ $\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{5\times 4}$ したがって $\sqrt{a}+\sqrt{a}=\sqrt{4a}$ ではないか。 ・OB＋OE＝OK より $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$ にはきまりが見当たらない。 よって、$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ にはならない。	◇加法はそのままたしてはいけないことに疑問をもつ生徒には、そのきまりを追究させることで、本時の理解を促す。 **（帰納的な考え方）** ◇特殊な場合の例をあげる生徒に対して、周りの生徒から反例を示させることで、加法はそのままたしてはいけないということに改めて気付かせたい。**（統合的な考え方）** ◇根拠を明らかにしながら自分の言葉でお互いに説明し合うことで、乗法と加法の原理・法則についての理解を深めさせる。
次時への見通し	〇平方根の四則演算については、これで確かめることができたか。 ・乗法、除法は証明することが必要だ。	◇具体例から推測したことの一般性を保証するためには、演繹的な推論が必要であることに気付かせ、次時への課題意識としたい。
本時の振り返り	〇振り返りカード	

Ⅴ　考察

１　場面１について

ルートどうしの四則計算は、形式的な練習によって習得できる部分であるが、目に見える量から数を拡張してきた経験から、分数の乗法・加法を想起させる発問を行うことで、類推的な考え方を用いて課題を設定した。さらに、図から帰納的に推論させることで、新たな性質を自ら見いだすことができた。そして、生徒Cのように「何回やったら文字を使って正しい式に証明できるのか」ということに気付き、帰納的推論で得られた性質を、演繹的に説明するにはどうしたらよいかという課題意識の高まりが感じられた。このように、数学的な考え方をしっかりと位置付けて、授業づくり、授業実践、事後研究を行ったことは大きな成果であった。

２　場面２について

ルートどうしの加法にきまりがあるか、ないかを一般化の考え方を用いて思考し、互いに意見交換したことで、下の振り返りシートからも分かるように、生徒Gの「ルートの数が違ったらできなくなってしまう」や生徒Kの「何のきまりも見つけられない」という気付きのように、より一層、平方根への興味・関心が高まったり、次時への課題意識の高まりが感じられたりした。今年度は数学の方法に関係した数学的な考え方に着目したが、今後の課題として、数学の内容に関係した数学的な考え方をさらに明確にし、日々の授業でそれらを意識した発問をしていくことが大切であると考える。

（授業者：：山口　泰浩）

氏名	A	1 2 3 4	いくつかの例を出して、ルートの乗法はそのままかけても良いことが分かったけれど、加法は、例を出しても規則が見つからなかったので、どのように計算すればいいかしっかり考えたいです。
氏名	B	1 2 3 4	たくさんの例をあげて正しいかを確かめられたので良かった。同じ数同士の加法は何となくわかったけれど、違う数同士加法はどうすればいいかわからなかった。
氏名	C	1 2 3 4	できるだけ多くの関係式を使うことはできましたが、何回やったら文字を使って正しい式に証明できるのが疑問に思いました。
氏名	D	1 2 3 4	OC＋OFによりフ√4＋√9＝√25とルート同士の足し算でも一応式は成り立っているのでどうにかすればルート同士の足し算も出来るのではないかと思った。
氏名	E	1 2 3 4	分からなかったけれど、人に頼らず、式や図を利用して自分の力で解こうと努力できた。おしいところまではできていたので、あともう少しがんばりたい。
氏名	F	1 2 3 4	長さ関係でみないと加法にある一定のきまりは、分数と似ているかんじがする

氏名	G	1 2 3 4	私は、加法にもきまりがあると思っていたけど友達の話をきいてルートの中の数がちがったらできなくなってしまうからおどろきました。次は、加法はどうやればいいかもっと考えたいです。
氏名	H	1 2 3 4	私やM君がやった方法は加法を乗法に直すことができたから成立した式であってふつうに√どうしの加法はできないんじゃないかと思った。
氏名	I	1 2 3 4	加法の謎にはまりました。Nくんに言われたのは違う数同士でないと成り立たないし、公に出た意見では同じ数でしかできない。不思議ですな…。
氏名	J	1 2 3 4	乗法と加法を学んで、まだルートにはいろんな方法がありそうだなと思いました。加法でのOくんの意見を聞いて、なるほどと思いました。
氏名	K	1 2 3 4	平方根の足し算はQ君が言ったように $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{25}$ になんのきまりも見つけられないでいるので次の時間ぜんぶ解決したい。
氏名	L	1 2 3 4	私は、加法のきまりをP君と同じように考えていたけどEくんの発見でほんとうにすべてに共通して言えるのかな、と思いました。