

数 学 科

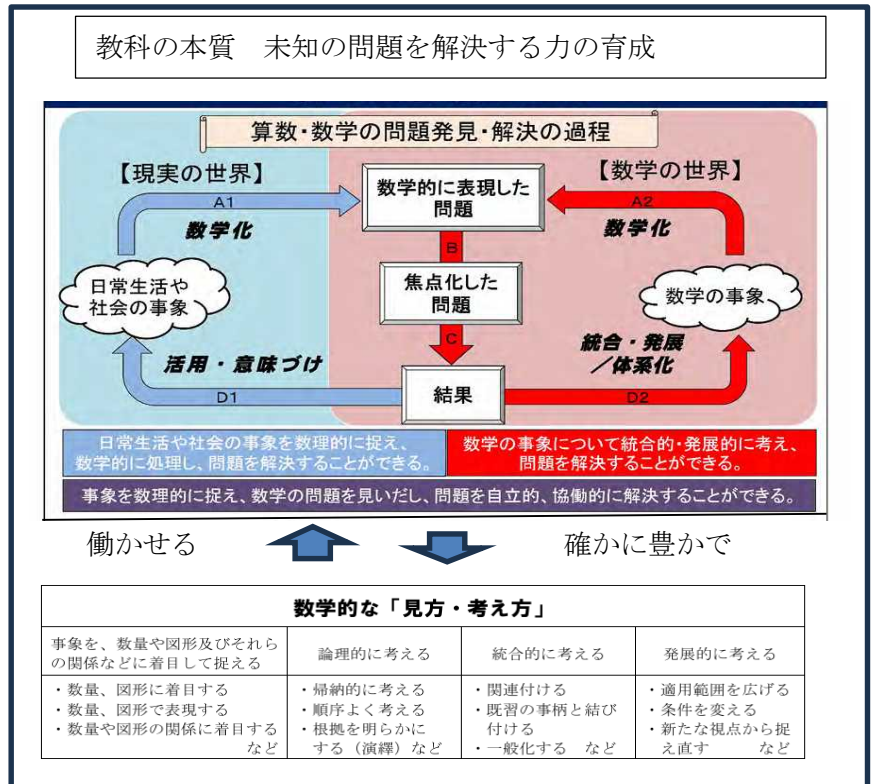
数学科を通して育成する「自立した学習者」

1. 数学科の本質

本校数学科では、生徒が大人になって、新しい課題にぶつかったとき、過去に体験した課題解決の場面を想起しながら、課題解決の方法を見いだせるような「未知の問題を解決する力の育成」を目指している。既に完成されている数学的事実を伝達するだけでは、そのような力は身に付かない。数学的知識・事実がどのように構成され、どのように創造されていたのか、その過程に触れたり、身に付けた知識・技能を日常生活の場面で活用、発揮したりすることで、生徒に数学の有用性や数学を学習する価値が認識され、数学のよさが感じられるのではないだろうか。

「未知の問題を解決する力の育成」のためには、学習活動において、未知の問題を発見し、自分で解決の方向性を定めて、数学的な見方・考え方を働かせることで問題を解決する経験が必要であると考えます。

そのために教師が行うべきことは2つあると考えます。



2. 「自立した学習者」への手立て

① 単元構成の工夫

生徒にどのような疑問を抱かせ、どのような課題を設定するのか。そして、その解決の過程から何を学ばせたいのかを明確にするために単元構成を工夫する必要がある。例えば、1学年「基本の作図」の単元では、既習では、線分の半分の長さが作図できない、長方形が作図できないなどの困り感が生徒からでてくる。その困り感をもとに、垂直二等分線や垂線の作図の必要性に気付き、生徒自ら課題意識をもって学習に取り組むことができるのではないかと考える。

② 問題を解決するための必要な見方・考え方の明確化

課題を解決するときに根拠があるから他者を納得させることができることが数学のよさである。そのためには、根拠を既習から見いだす必要がある。しかし、生徒自ら既習を見いだすのは容易ではない。よって、教師が行うべきこととして、課題を解決するためには、どのような見方・考え方を働かせる必要があるのか、働かせるためにはどのような問いが必要なのか明らかにすることである。

以上の2つを行うことで、生徒と教師だけではなく、生徒同士や、過去の自分と現在の自分といった学びの往来が生まれ、自己調整をしながら自立した学習者へと向かうのではないかと考える。

【参考文献】

- ・中学校学習指導要領（数学編）
- ・「数学的な考え方の具体化と指導」（明治図書）片桐重男

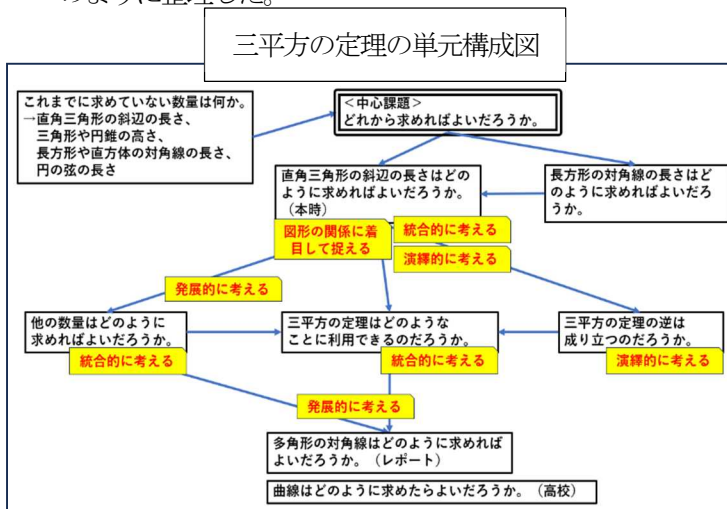
実践事例

第3学年 B図形「三平方の定理」の実践

1 単元名 三平方の定理

2 本校の研究と本実践の関わり

数学の学習では、自分でやったところを自分で確認することができる。間違えたところは元に戻って考えればその間違いがわかる。間違いなく正しいということも自分で確認することができる。これは、他教科にはない数学科の特徴である。したがって、生徒が既習の数学を生かすことで、問題解決につながったと実感したり、自分の取り組みを確認したり、修正したり、そのよさを味わったりすることができるような単元を構成する必要がある。生徒にどのような疑問を抱かせ、どのような課題を設定するのか。そして、その解決の過程から何を学ばせたいのかを明確にすることで、数学科の「自立した学習者」の育成につながるのではないかと考える。よって本単元において単元構成を以下のように整理した。



3 実践

(1) 単元について

生徒は図形の計量に関して、第1学年では、扇形の弧の長さや面積、基本的な柱体、錐体及び球の表面積や体積を求めてきた。第3学年では、新しい数として平方根を見いだすとともに、相似な図形では図形の構成要素の関係に着目し、図形の性質を根拠に辺の長さや角の大きさについて求めてきた。特に平方根の導入では、格子点を用いて、点Oから各点までの長さを求めさせることで、求めたい線分を1辺とする正方形の

面積を求めることが解決につながることに気づき、長さを表すために用いられている根号の必要感やよさを実感することができた。このように、今まで求めてこなかった長さを求めさせる際に、既習を根拠に考えたり、演繹的に確かめたりすることで、論理的に考察し表現する力が高まってきている。

本単元の導入では、これまでの図形の学習で、どのような数量を求めたか、求めていないかを考えさせることで、直角三角形の斜辺や長方形の対角線、三角形の高さなどを求めることができていないことに気付かせた。そして、数量を求めることはできないのか、求めるとしたらどれから求めていけばよいかと問うことで、直角三角形の斜辺を求めることができれば、他の数量も求めることができることに気付かせた。このようにどの数量から求めるか生徒に順序を決めさせたことで課題意識は高まってきていた。

そこで本時では、前時で生徒が決めた課題である「直角三角形の斜辺はどのように求めればよいか」について考える。まず直角をはさむ2辺が2cm、5cmの直角三角形の斜辺を、平方根の単元で求めたい線分を1辺とする正方形の面積を用いて求めたことを想起させながら求めさせる。次に、直角をはさむ2辺の長さがどんな長さでも求められるのかと問うことで、文字式を用いて一般化し、三平方の定理を証明しようと考えたと想定した。今まで定理を証明する際、1つの方法だけでなく、複数の方法を考えさせてきた経験から、既習を振り返り、これまでの学びを整理し、様々な証明方法を見いだそうとすると考える。三平方の定理は3年間の図形の学習の最後に位置付けられている。だからこそ、これまでの学びを整理させ、学ぶ順序を自ら決め課題をつくり出していく過程を大切にしたい。また、既習を用いて解決することができる数学のよさを用いて、多様な証明方法を考えさせたい。そうすることで、これまでの学びと新たな学びがつながり、深い学びが実現されるのではないかと考える。

(2) 単元の目標

- 三平方の定理の意味を理解し、それが証明できることを知っている。 (知識及び技能)
- 三平方の定理を見だし、具体的な場面で利用することができる。 (思考力、判断力、表現力等)
- ◎ 三平方の定理のよさを実感し、三平方の定理について学んだことを生活や学習に生かそうとしたり、問題を振り返って検討しようとしたりする。 (学びに向かう力、人間性等)

(3) 全体計画 (全9時間)

- (1) 三平方の定理・・・3時間 (本時2/3)
- (2) 三平方の定理の逆・・・1時間
- (3) 三平方の定理の利用・・・5時間

時	学習活動	評価規準・評価方法
1	○これまでの図形の学習を振り返り、求められる数量やこれから求めたい数量について考える。	態度①：行動観察、ノート記述、振り返り ・既習の図形の性質や数量の関係を振り返り、まだ求めている数量について考えようとしている。
2 本 時	○直角三角形の斜辺の長さについて考える。	思考・判断・表現①：行動観察、ノート記述 ・平方根の学習で求めたい線分を1辺とする正方形の面積を用いたことを想起させることで、三平方の定理を見いだすことができる。 態度②：ワークシート、行動観察、振り返り ・求めている数量を見だし、解決する順序を決め、既習を用いてどのように求めればよいか考えようとしている。
3	○求めている数量を、三平方の定理を用いて求める。	知識・技能①：行動観察、ノート記述 ・三平方の定理の意味を理解することができる。 思考・判断・表現②：行動観察、ノート記述 ・具体的な場面で、三平方の定理を活用することができる。 態度③：ワークシート、行動観察、振り返り ・求めている数量を見だし、解決する順序を決め、既習を用いてどのように求めればよいか考えようとしている。

(4) 本時の学習 (全2/9時間)

① 指導目標

- ・平方根の学習で求めたい線分を1辺とする正方形の面積を用いたことを想起させることで、三平方の定理を見いだすことができる。

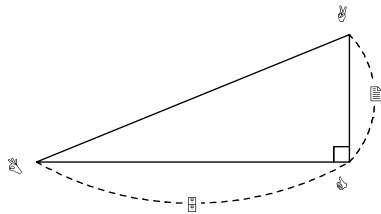
【思考・判断・表現】

- ・求めている数量を見だし、解決する順序を決め、既習を用いてどのように求めればよいか考えようとしている。

【主体的に学習に取り組む態度】

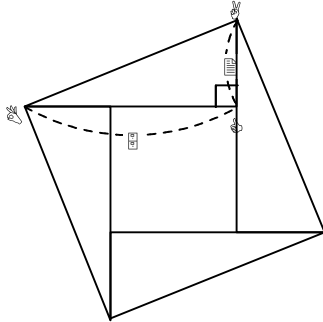
② 展開

学習内容
<p>1 前時の確認をする。</p> <ul style="list-style-type: none"> ○まだ求めているものは何だろうか。 <ul style="list-style-type: none"> ・長方形の対角線の長さ ・直角三角形の斜辺の長さ ・正三角形の高さ ・ひし形の1辺の長さ ・円の弦の長さ ・錐体の高さ ○この中でどれを求めたいか。 <ul style="list-style-type: none"> ・直角三角形の斜辺の長さ ・長方形の対角線の長さ
<p>直角三角形の斜辺はどのように求めればよいのだろうか。</p>
<p>2 △ABCの斜辺について考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> ○BC = 5 cm、CA = 2 cmの△ABCの斜辺ABを求める。



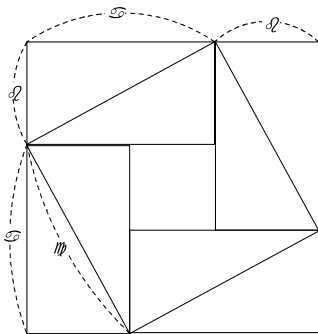
○解答

- ABを1辺とする正方形をつくると、面積は $5 \times 2 \div 2 \times 4 + (5 - 2)^2 = 29$ によって、ABの長さは $\sqrt{29}$ cm



3 直角三角形の斜辺の長さを一般化する。

- 縦を a ,横を b ,斜辺を c とする直角三角形の斜辺を1辺とする正方形の面積を求めると



全体の正方形の面積から、四隅の直角三角形の面積を引くと、

$$c^2 = \frac{1}{2}ab \times 4 + (a - b)^2$$

整理すると、

$$c^2 = a^2 + b^2$$

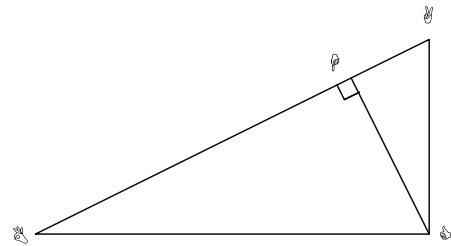
4 他の証明方法がないか、既習内容から考える。

- 補助線を引き、相似な三角形をつくる。
- 等積変形
- 規則性

5 他の方法で証明する。

○相似な直角三角形をつくる証明

直角Cから斜辺ABに垂線を下ろし、交点をHとする。



AH= x , BH= y とする。

$\triangle ABC \sim \triangle CBH$ より $AB : CB = BC : BH$

よって、 $a : c = x : a$ したがって $x = \frac{a^2}{c}$

同様に、 $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ より $y = \frac{b^2}{c}$

$x + y = c$ なので、 $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$ よって

$$a^2 + b^2 = c^2$$

6 振り返り

4 成果と課題

視点① 単元構成の工夫

本単元は、中学校の図形領域の学習において、最後に取り組む集大成となる単元である。よって「過去の自分」と「現在の自分」という学びの往来や生徒同士の学びの往来を通して、自分の中で今までの学びを整理し、どのように考えればよいか見通しを立て、既習を用いて解決するという一連の流れを経験させたいと考えた。そうすることで、既習を用いて解決することができる数学のよさを実感し、自立した学習者への育成につながると考えた。

一般的に三平方の定理の導入では、直角三角形の斜辺はどのように求めればよいかについて、生徒の課題意識はなく、教師側から提示することが多い。そうすると、生徒にとって「必要感」がないまま、学習に取り組んでしまうことになるので、自立した学習者とはかけ離れたものになってしまう。よって本単元では、まず生徒に今までの学びを整理させるために、求めることができる数量とまだ求めている数量について考えさせた。求めている数量については、当初は思い浮かばないが、図形を構成する要素について整理させることで、生徒の中から、直角三角形の斜辺、長方形の対角線、円の弦、三角形の高さなど、いくつかでて

くる。次にどの順番で求めていけばよいかについて考えさせることで、求めている数量はすべて直角三角形の斜辺を求めることができれば求められることに気付き、生徒自ら解決する順序を決めることになる。以下は生徒の振り返りである。

生徒A	求めている数量を自分で見つけるのは難しかったけれど、意外と求めているところが多く、特に対角線はあまり触れていなかった。直角三角形の斜辺を上手く使えばそういったものも求められそうだ。次回は直角三角形について調べて、実際に図形の求められなかったところを求めていきたいと思う。
生徒B	＜前時＞ 「求めている数量」が、なかなか思いつかなかった。しかし、友だちの意見を聞くうちに、直角三角形の斜辺を求めることが他のたくさんの図形の辺の長さ（斜めの辺）を求めることにつながることに気が付き、驚いた。自分一人では到底気づけなかったことなので、次回の授業も「直角三角形の斜辺の求め方」やその応用を友だちの意見を大切にしていって考えていきたい。
生徒C	＜前時＞ できることやできないことをたくさん挙げてみて、学んだことを生かせば求められる幅がとても大きくなるなど実感すると同時に、それでも求められにくそうな直角三角形の斜辺をどう求めていくのか気になった。
生徒D	＜前時＞ 今まで学んできた図形について振り返り今後何を学びたいかを考えることができた。求められる図形は、条件があったり、基本的な形の図形だけだったりと限られていて、もっと求めたいものがたくさんあると感じた。今後も今までの学習を生かしながら、ただ知識をいれるだけでなく、自分から考え、学びを深めていきたい。

成果としては、今回の実践のように単元構成を工夫すると、直角三角形の斜辺や長方形の対角線の長さを求めた経験がないことから、上記のように多くの生徒がどのように求めればよいか疑問を抱き、主体的に取り組む姿が見られたことである。

課題としては、求めている数量について考えさせるとき、一部の生徒から「自分では見つけ出すのが難しい」「なかなか思いつかなかった」という戸惑いが見られたことである。生徒の思考を促すために、求められる数量はどのような情報があったから求められたのかなど、辺の長さについて着目させることが必要であったと感じた。また、相似の図形を用いて証明する方法では、難しく感

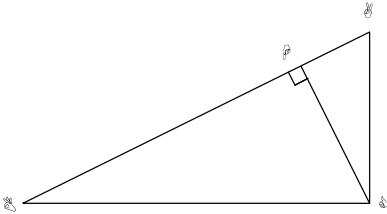
じる生徒も多く見られ、その生徒らの振り返りでは、「公式を覚えたい」というような記述があった。「なぜそうなるのかを理解する」ことの価値を、単元全体を通じて、どのように動機付けし続けるか、論理的思考の定着には引き続き工夫の余地があると考えられる。

視点② 問題を解決するための必要な見方・考え方の明確化

「自立した学習者」を育成するためには、自ら課題を見いだすことができる単元構成の工夫と、課題を解決するために生徒に自ら見方・考え方を働かせる教師の支援が必要である。よって、三平方の定理の証明の際には、次の2つを行った。1つ目は、平方根の単元で求めたい線分を1辺とする正方形の面積を求めたことや相似な図形の単元で直角三角形に補助線を引くことで相似な三角形ができることなどの既習の考えを想起させること、もう1つは、三平方の定理を文字を用いて一般化の考え方を働かせることである。図形の関係に着目させ、既習が用いられるように、どのように補助線を引けばよいかや、一般化の考え方をさせるために、どの直角三角形でも同じことがいえるかの問いから数学的な見方・考え方を働かせていた。

生徒の中には、教師が想定した証明方法だけでなく、面積比の学習を活用するなどの考えもみられた。

＜面積比を用いた考え方＞



$\triangle ACH \sim \triangle CBH \sim \triangle ABC$ より
 相似比が $AC : BC : AB = a : b : c$
 よって、面積比は $a^2 : b^2 : c^2$
 図より $\triangle ABC = \triangle ACH + \triangle CBH$ なので
 $a^2 + b^2 = c^2$

以下、生徒の振り返りである。

生徒E	補助線を引くと相似な図形ができるのでそれを応用して相似比と面積比を利用することで直角三角形の斜辺を求めるという方法を理解することができました。相似はいろいろなところで活用できることを知ってとても驚きました。
生徒F	正方形の一边を利用して求めたり、相似を利用して求めたり、様々な方法で斜辺を求めた。また、今日の授業で改めてわからない数量を文字に置き換えて考えることは答えを出す近道になるとわかったので、これからも文字に置き換えることを忘れずに学習に取り組んでいきたいです。
生徒G	直角三角形の斜辺の長さも、これまで習った、平方根の学習の時の正方形の対角線や一边の求め方、相似の知識を使えば、求めることができるとわかった。補助線を引いたりして、今ある知識を生かせる形にすることが大切だと改めて感じた。直角三角形の斜辺の長さの求め方がわかったので、長方形の対角線の長さや、正三角形の一边の長さがわかっているときの面積も求められると思うので、次回試してみたい。
生徒H	三角形を組み合わせて正方形をつかって解くやり方や、相似を使って解くやり方を学んだ。相似で面積比を使って解くやり方が早く求められるなど思った。あと、三角形の各辺から正方形をかいて、斜辺の正方形と残りの二辺の正方形の和が等しいことを証明できれば、求められるなど思った。いつかやってみたい。

生徒E、Fのように既習を用いるよさや一般化の考え方のよさを実感し、今後取り組む課題にも本時で学んだことを生かそうという態度を養えたと考える。また、生徒G、Hのように自ら次の課題を設定している生徒も見受けられた。働かせたい数学的な見方・考え方を明確にし、教師の問いかけにより意図的に働かせることで、数学的な見方・考え方のよさを実感し、生徒が今後も自発的に見方・考え方を働かせ、問題を発見・解決できるようになると考える。

(授業者：竹森 翔祐)

